GONIOMETRIA

Gli angoli in trigonometria si misurano prevalentemente in gradi sessagesimali ed in radianti:

GRADO: è la 360ma parte dell'angolo giro

RADIANTE: è l'angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza e che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

Se ρ è la misura dell'angolo in radianti ed α quella in gradi , per passare da un sistema di misura all'altro si utilizza la formula $\rho : \pi = \alpha : 180°$.

$$\rho = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$$

$$\alpha = \frac{180° \cdot \rho}{\pi}$$

CORRISPONDENZE PRINCIPALI TRA GRADI E RADIANTI

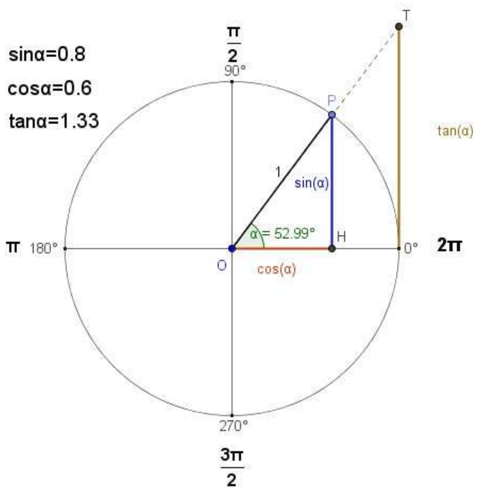
GRADI	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
RADIANTI	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

La circonferenza goniometrica è quella avente il centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio unitario; la sua equazione è $x^2+y^2=1$.
In essa un punto P di coord. (x;y) è individuato da un ascissa e da un ordinata $\begin{matrix} x = \cos\alpha \\ y = sen a \end{matrix}$ con α misurato in senso orario a partire dall'asse y.

Sostituendo nell'equazione della circonferenza si ha

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ **1° relazione fondamentale della goniometria**.



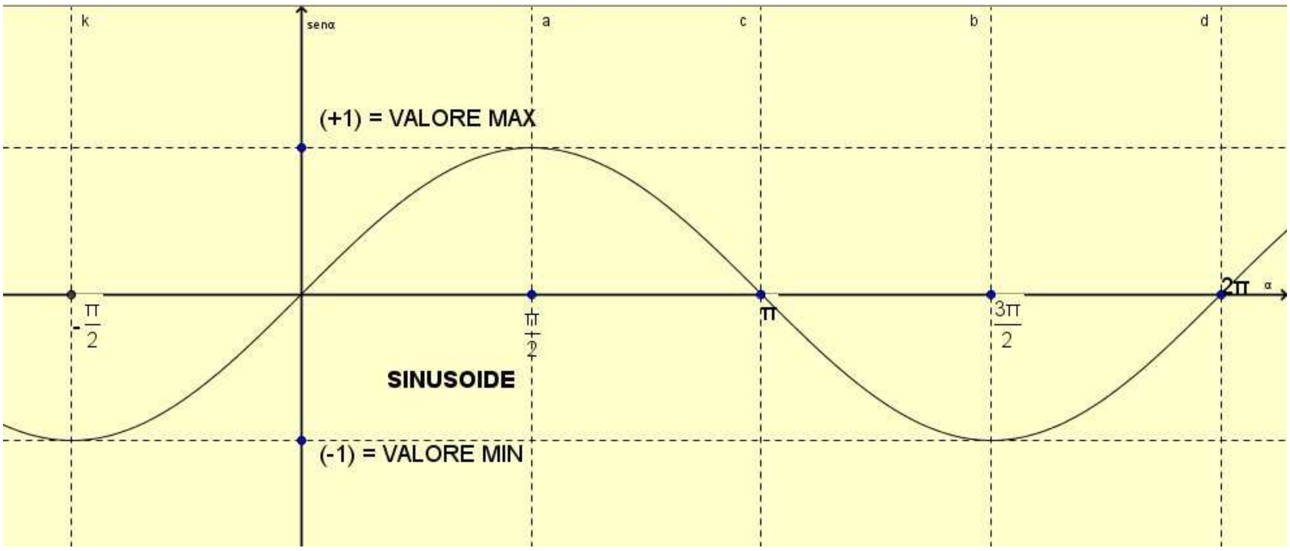
VARIAZIONE E PERIODICITA' DEL SENO

Quando α cresce oltre i 360°, i valori del seno e del coseno si ripetono periodicamente; diremo quindi che il seno ed il coseno sono funzioni periodiche con periodo uguale a 360°

Variazione $-1 \leq sen\alpha \leq 1 \Rightarrow |sen\alpha| \leq 1$

Periodicità $sen(\alpha + k360°) = sen\alpha$ con k un qualunque n° inero positivo, $k \in Z$

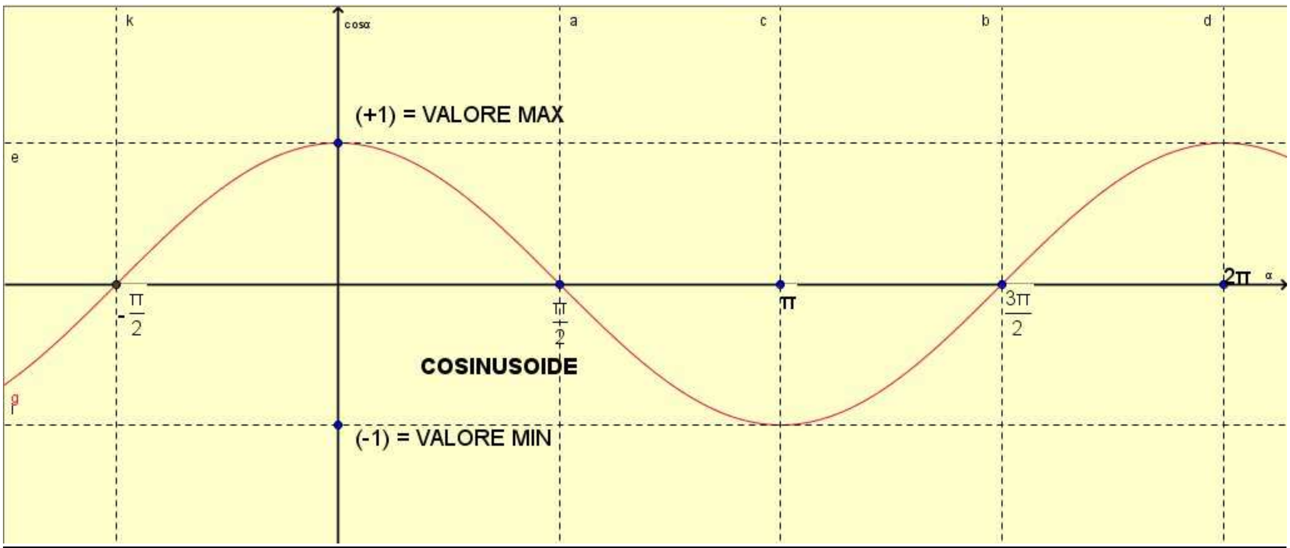
$sen(\alpha + 2k\pi) = sen\alpha$ dopo un angolo giro i valori di *sena* si ripetono



VARIAZIONE E PERIODICITA' DEL COSENO

Variazione $-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \Rightarrow |\cos\alpha| \leq 1$

Periodicità $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ dopo un angolo giro i valori di $\cos a$ si ripetono

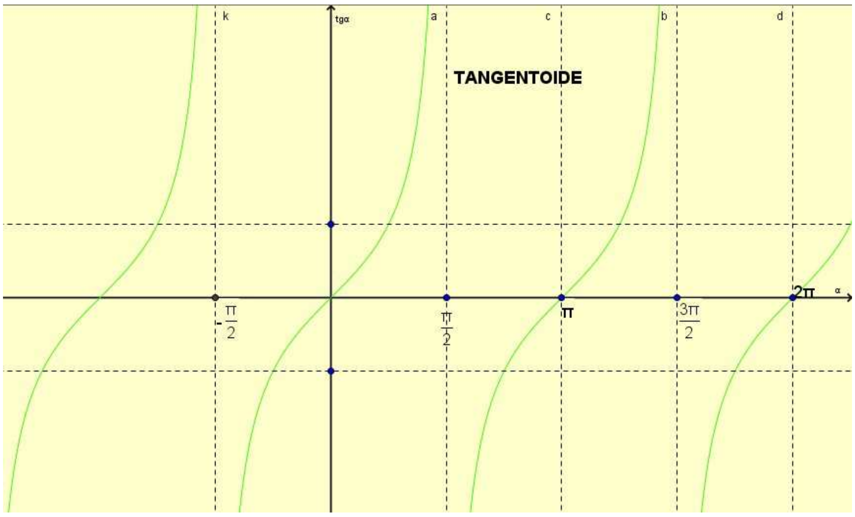


VARIAZIONE E PERIODICITA' DELLA TANGENTE

$tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ **2° relazione fondamentale della goniometria**

Variazione $tg\alpha$ varia tra $(-\infty;+\infty)$ - $\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ infatti non è definita per $\alpha=\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Periodicità $tg(\alpha+k\pi)=tg\alpha$ dopo un angolo piatto i valori si ripetono

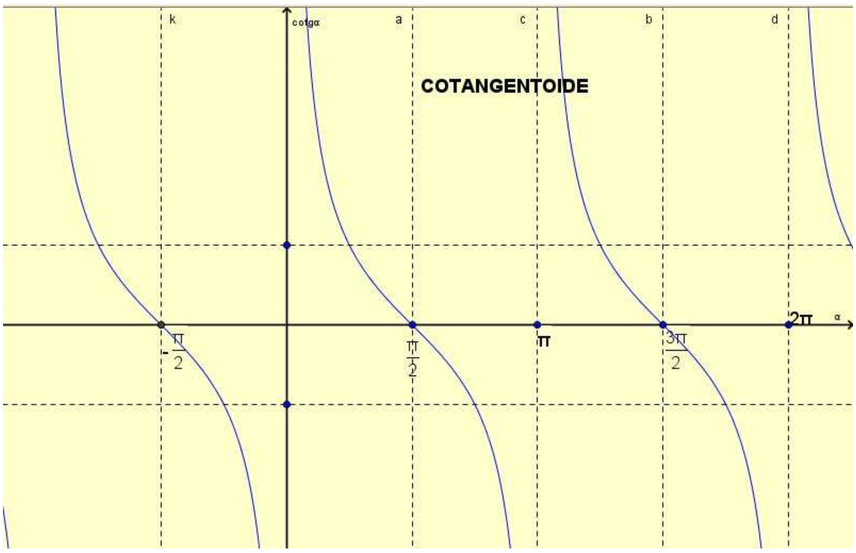


VARIAZIONE E PERIODICITA' DELLA COTANGENTE

$\cot g\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \dfrac{1}{tg\alpha}$

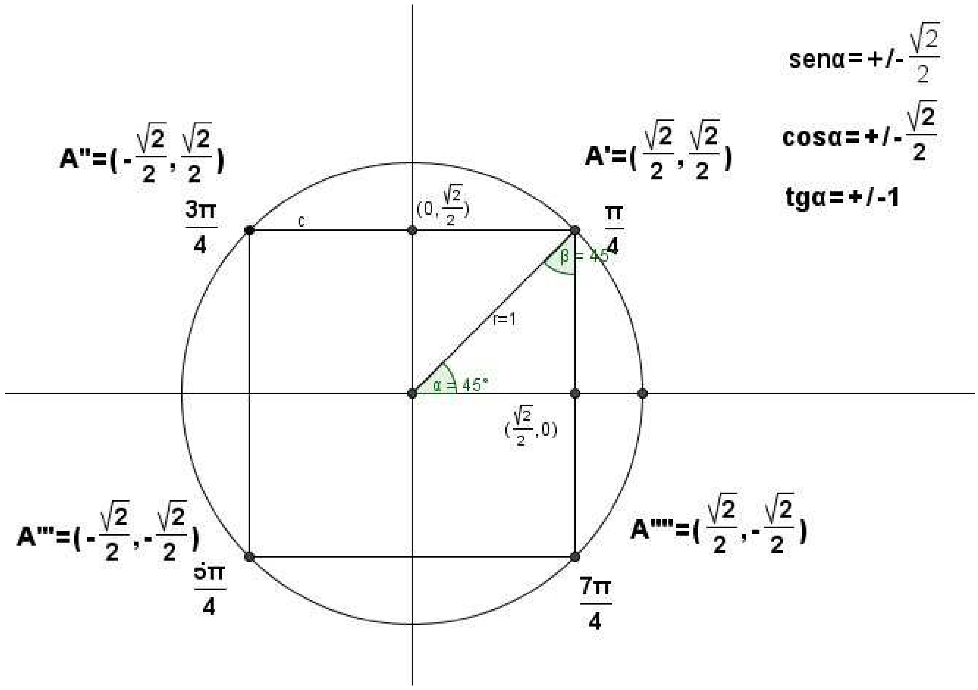
Variazione $\cot g\alpha$ varia tra $(-\infty;+\infty)$ - $\{\pm k\pi\}$ infatti ma non è definita per $\alpha = k\pi$

Periodicità $\cot g(\alpha+k\pi)=\cot g\alpha$ dopo un angolo piatto i valori si ripetono.

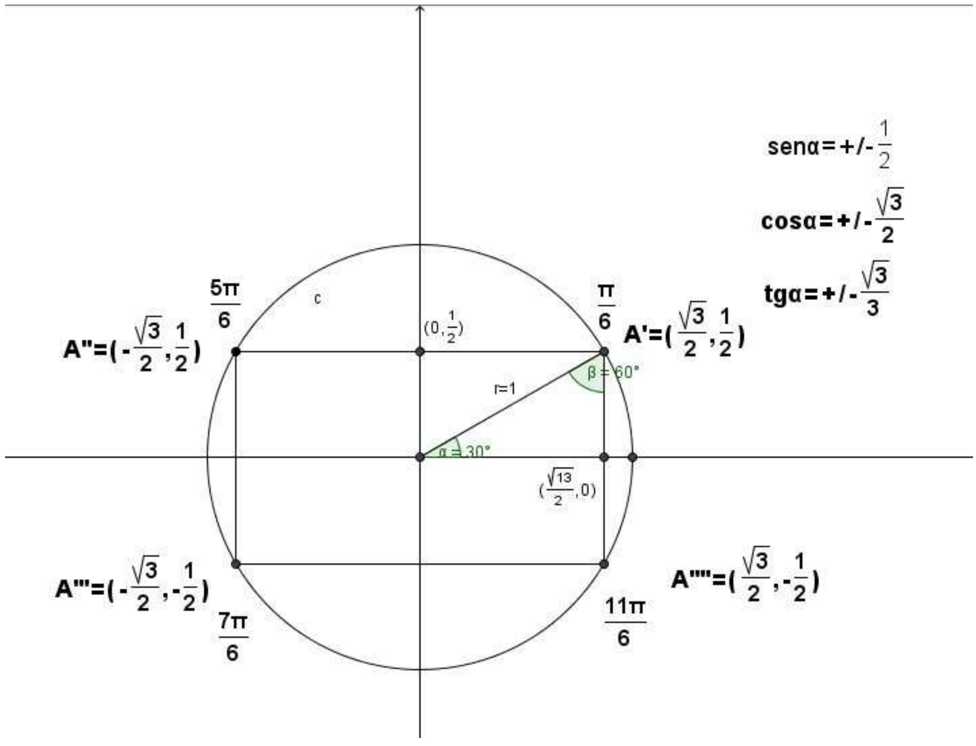


FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

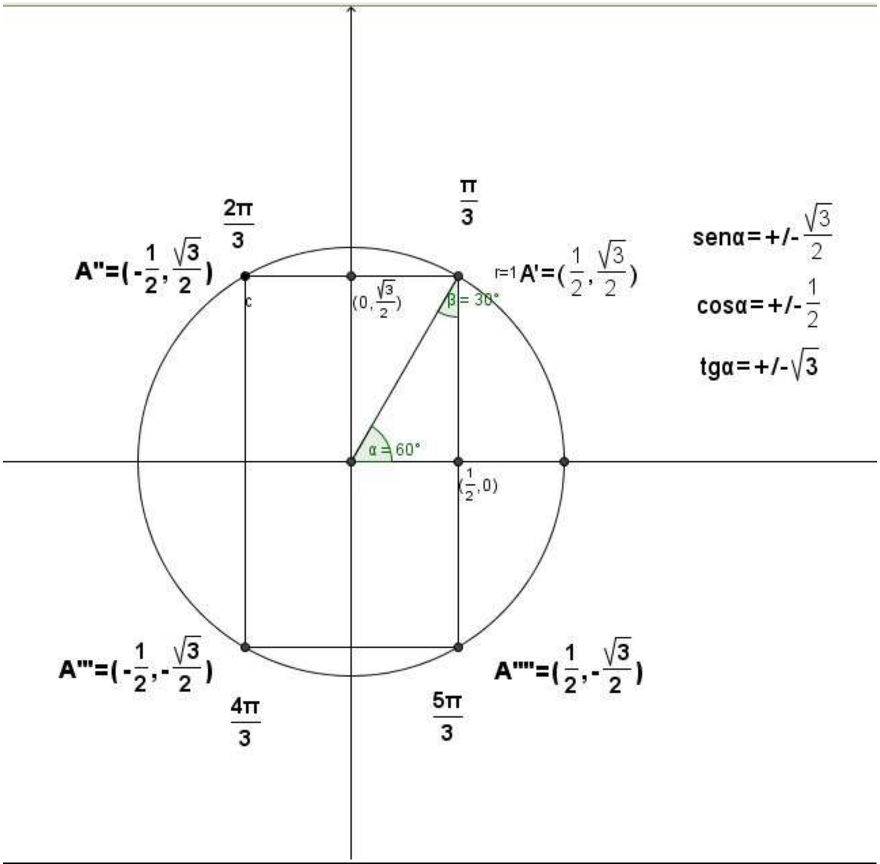
Se $\alpha = 45°$ $\Rightarrow$ $sen 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.....................$\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$..................$tg 45 = 1$



Se $\alpha = 30°$ $\Rightarrow$ $sen 30 = \frac{1}{2}$.....................$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$..................$tg 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Se $\alpha = 60°$ $\Rightarrow$ $sen 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.....................$\cos 60 = \frac{1}{2}$..................$tg 60 = \sqrt{3}$



RELAZIONI FONDAMENTALI TRA LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Da $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ si ottengono sen α e cos α e tg α :

a) se è noto sen α $\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha} \\ tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}} \end{cases}$

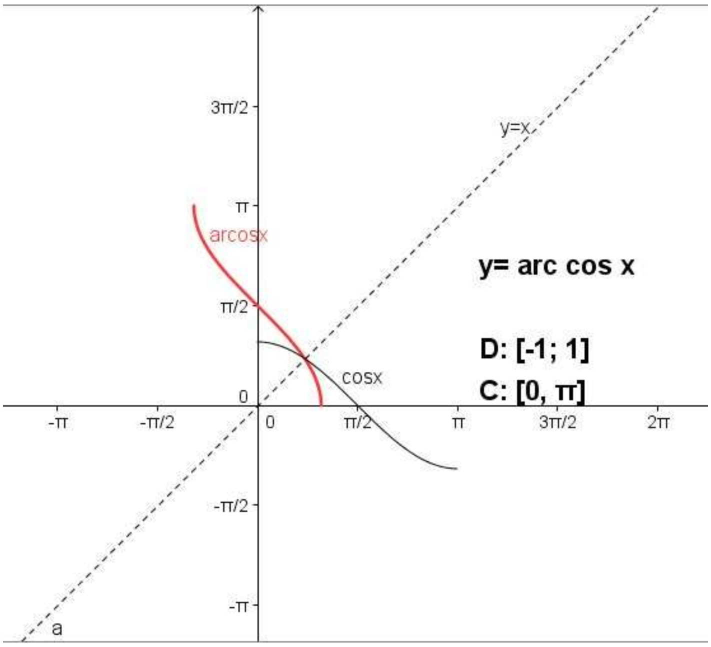
b) se è noto cos α $\Rightarrow \begin{cases} sen\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \\ tg\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \end{cases}$

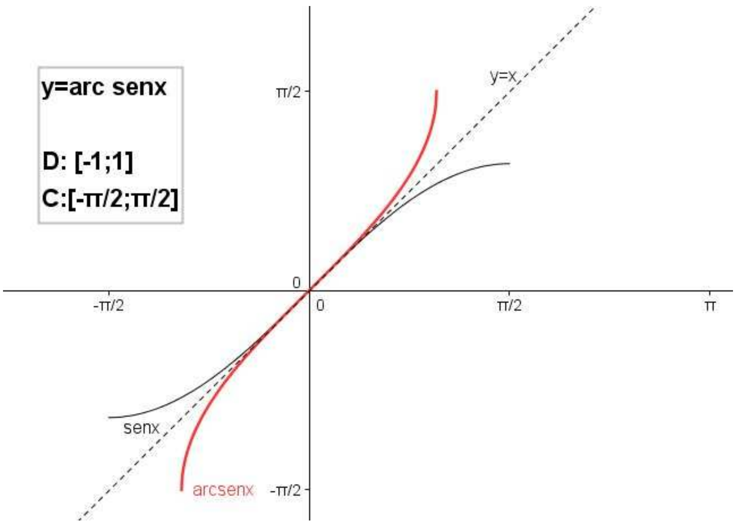
c) se è noto tg α $\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \\ sen\alpha = \pm\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \end{cases}$

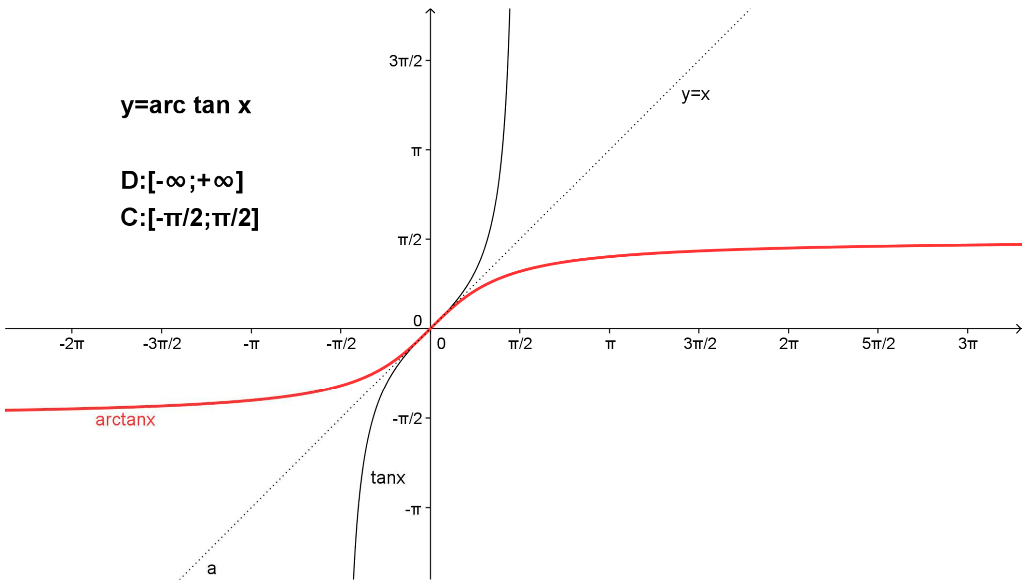
FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

Sappiamo che $\begin{matrix} x = \cos\alpha \\ y = sena \end{matrix}$; il problema da risolvere è quello di determinare gli archi o angoli che sono associati a certi valori noti di seno, coseno. Per conoscerli bisogna invertire tali funzioni, e ciò si può fare solo se si restringe la variazione di tali funzioni a certi intervalli finiti dell'angolo, in quanto esse sono periodiche. Le funzioni inverse sono arcoseno, arcocoseno e arcotangente.

Calcolare α = cos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ si riduce a dare risposta alla seguente domanda" trovare il valore dell'angolo α il cui coseno è $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La risposta è $\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.






y=arc tan x
D:[-∞;+∞]
C:[-π/2;π/2]
y=x
arctanx
tanx
a
3π/2
π
π/2
0
-π/2
-π
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DI SENO, COSENO E TANGENTE

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp sen\alpha \cdot sen\beta$$

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot sen\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$ valida se $\alpha, \beta, (\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$sen\, 2\alpha = 2\, sen\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - sen^2\alpha$$ da cui $\cos 2\alpha = 1 - sen^2\alpha$ e $\cos 2\alpha = 2\cos^2 a - 1$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$ valida se $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

FORMULE PARAMETRICHE

Dalle $sen\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$ e $\cos\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$ valida se $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \alpha \neq \pi + 2k\pi$

si ottiene, posto $\tan\frac{\alpha}{2} = t$ $sen\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

FORMULE DI BISEZIONE

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$ valida se $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \alpha \neq \pi + 2k\pi$

Il segno si sceglie in base al quadrante in cui cade il punto associato all'angolo $\frac{\alpha}{2}$

La formula della tangente può essere espressa anche nei seguenti modi:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha} \quad con\alpha \neq \pi + 2k\pi \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} \quad con\alpha \neq k\pi$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

$$sen\, p + sen q = 2sen\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$sen\, p - sen q = 2\cos\frac{p+q}{2}\, sen\frac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = -2sen\frac{p+q}{2}\, sen\frac{p-q}{2}$$

FORMULE DI WERNER

$$sen\alpha\, sen\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$sen\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)]$$